Бондаров Михаил Николаевич
Учитель физики лицея №1501 и ГОУ ЦО «Технологии обучения» г. Москвы.

Осторожно! Закон всемирного тяготения

В статье на примере истории решения школьниками нескольких задач на закон всемирного тяготения показано, что не всегда можно заменять тело материальной точкой, помещённой в его центр масс.

Введение

Три друга Алёша, Вася и Слава, успешно окончив десятый класс, договорились часть летних каникул использовать для повторения любимого школьного предмета – физики. Июль уже подходил к концу, а они всё никак не находили случая собраться вместе. И вот однажды Алёша пригласил товарищей к себе на дачу. «Давайте займёмся сегодня решением задач», – предложил серьёзный Слава. «А с какой темы начнём?» – спросил гостеприимный хозяин. Услышав, как в саду упало яблоко, весёлый Вася заметил: «Сама природа выбрала для нас тему «Закон всемирного тяготения»! Возражений не было, и ребята задумались над первой задачей. Проследим за рассуждениями одного из них.

Процесс решения задач

Задача 1. Во сколько раз уменьшится сила тяготения между однородным шаром и материальной точкой, соприкасающейся с шаром, если материальную точку удалить от поверхности шара на расстояние, равное двум диаметрам шара?

Алёша приступил к решению задачи, а его друзья – Вася и Слава – стали слушателями.

«Материальная точка, соприкасающаяся с шаром, – размышлял вслух Алёша, – похожа на человека, стоящего на поверхности Земли. На уроках для решения подобной задачи мы предполагали, что вся масса Земли сосредоточена в её центре масс, совпадающем с геометрическим центром, если считать Землю шаром. Тогда нужно дважды применить закон всемирного тяготения. Сначала материальная точка соприкасается с шаром, сила $F_1 = G\dfrac{Mm}{R^2}$.

Для второго случая, когда точка удалена от центра шара на пять его радиусов, имеем $F_2 = G\dfrac{Mm}{(5R)^2}$.»

Разделив первое уравнение на второе, Алёша получил отношение сил, равное 25, что совпало с ответом в задачнике и немало его порадовало. Вася и Слава улыбнулись.

«Ну, что ж, неплохо! – скромно похвалил себя наш герой. – Перейдём теперь к следующей задаче.»

Задача 2. Имеется шар массой M и радиусом R и материальная точка массой m. Во сколько раз уменьшится сила тяготения между ними, если в шаре сделать сферическую полость радиусом $R/2$? Центры шара и полости совпадают.

Алёша нисколько не удивился, что не задано расстояние между телами: по условию оно не изменяется, следовательно, сократится при делении, когда будет искаться отношение сил. При отсутствии полости в шаре формулу для расчёта силы тяготения записать легко:

$$F_1 = G\frac{Mm}{r^2},$$

где r – расстояние от центра шара до материальной точки.

Когда же в шаре появилась полость, написать формулу стало немного сложнее, но Алёша решил и в этом случае применить использованный ранее приём: считать, что вся масса шара с полостью сосредоточена в его центре масс. Тогда нужно только найти массу шара с полостью. Поскольку удалена внутренняя часть радиусом $R/2$, то её объём составляет $1/8$ от первоначального объёма шара

$$\left(V_{\text{п}} = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}V_{\text{шара}}\right),$$

значит, масса оставшегося шара с полостью равна $M^* = \dfrac{7}{8}M$ (предполагается, что шар однородный). Следовательно, сила тяготения во втором случае равна

$$F_2 = G\frac{M^* m}{r^2} = \frac{7}{8}\cdot G\frac{Mm}{r^2}.$$

Алёша вновь, как и в первой задаче, разделил F_1 на F_2 и снова убедился, что в ответе тоже $8/7$.

После этого он с одобрения друзей перешёл к третьей задаче, которая оказалась со звёздочкой.

Задача 3*. В свинцовом шаре радиусом R сделана сферическая полость, которая касается поверхности шара и центра шара (рис. 1). Масса шара до того, как была сделана полость, равнялась M. С какой силой свинцовый шар будет притягивать маленький шарик массой m, находящийся на расстоянии $l > R$ от центра свинцового шара на прямой, соединяющей центры шара и полости? (Ответ из задачника:

$$F = GMm\frac{7l^2 - 8lR + 2R^2}{8l^2\left(l - \frac{R}{2}\right)^2}.)$$

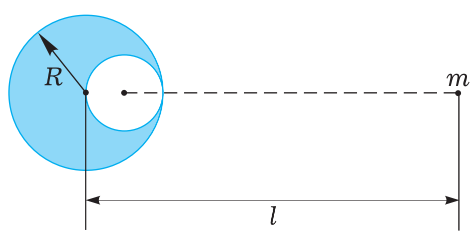

Рис. 1

Алёшин способ решения. В предыдущих задачах Алёша дважды использовал приём, когда вся масса тела помещалась в его центр масс. И в третьей задаче он решил поступить так же. Для этого, прежде всего, нужно определить положение нового центра масс свинцового шара после того, как в нём сделали полость. Обозначим через x расстояние от геометрического центра шара до искомого центра масс (рис. 2). Масса вещества, находившегося ранее в полости, равна $M/8$, так как радиус полости $R/2$ (аналогично расчёту из второй задачи). Теперь величину x можно определить, представив сплошной шар радиусом R состоящим из шара с полостью и шара радиусом $R/2$. Для этого приравняем момент сил, действующих на сплошной шар, к сумме моментов сил, действующих на шар с полостью и шар радиусом $R/2$. Моменты сил берём относительно точки, совпадающей с центром масс шара с полостью.

$$Mgx = 0 + \frac{M}{8} g\left(\frac{R}{2} + x\right).$$

Отсюда $x = R/14$.

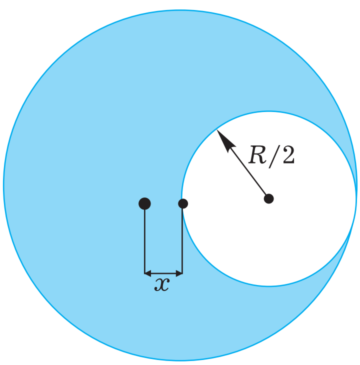

Рис. 2

Искомую силу притяжения свинцовым шаром с полостью (его масса равна $7M/8$) шарика массы m определим так, будто это две точечные массы, находящиеся на расстоянии $l + R/14$ друг от друга, т.е. по закону всемирного тяготения:

$$F = G\frac{7Mm}{8(l + R/14)^2}.$$

Ответ Алёши: $G\frac{7Mm}{8(l + R/14)^2}$.

Алёша очень удивился, что его ответ не совпал с ответом в задачнике, и стал искать ошибки в математических преобразованиях, но так и не нашёл их. Пришлось обратиться за помощью к товарищам.

Первым гипотезу выдвинул Вася. Он предложил попробовать решить задачу по-другому: «А вдруг в задачнике опечатка! Если же мы решим задачу другим способом и получим тот же ответ, что и раньше, то убедимся в нашей правоте».

Васин способ решения. Вырежем мысленно из свинцового шара с полостью ещё одну полость радиуса $R/2$ симметрично геометрическому центру шара. Тогда центр масс свинцового шара с двумя симметричными полостями будет находиться в его геометрическом центре; масса его равна

$$M - 2\frac{M}{8} = \frac{3}{4}M.$$

Искомую силу определим, как сумму сил $F_1 + F_2$ притяжения шарика массой m двумя телами, массы которых считаем сосредоточенными в их центрах масс: свинцового шара с полостями (его масса $3M/4$, расстояние до шарика l) и вырезанного шара (его масса $M/8$, расстояние до шарика $l + R/2$). Согласно закону всемирного тяготения

$$F_1 = G\frac{3Mm}{4l^2}, \quad F_2 = G\frac{Mm}{8(l + R/2)^2}.$$

Искомая сила равна сумме этих сил

$$F = F_1 + F_2 \Rightarrow F = \frac{GMm}{4}\left(\frac{3}{l^2} + \frac{1}{2(l + R/2)^2}\right).$$

Ответ Васи:

$$\frac{GMm}{4}\left(\frac{3}{l^2}+\frac{1}{2(l+R/2)^2}\right).$$

Ответы Алёши и Васи не совпали. Отличались они и от ответа в задачнике. Друзья призадумались. Прослушав ещё раз рассуждения Алёши и Васи и посмотрев их выкладки, Слава сказал: «Ошибка приведённых способов решения заключается в неверном предположении о том, что шар с полостью притягивает шарик так же, как его притягивала бы точечная масса той же величины, помещённая в центре масс шара с полостью. Я помню, как на занятиях кружка по решению олимпиадных задач Анатолий Иванович говорил, что это утверждение справедливо только в специальных случаях, когда размеры тел малы по сравнению с расстоянием между ними или когда притягивающее тело имеет шарообразную форму. В этих случаях можно вычислять силу тяготения тела, считая, что вся его масса сосредоточена в центре масс. Давайте будем решать задачу, рассматривая только шарообразные тела».

Славин способ решения. Если бы свинцовый шар был сплошной, то он притягивал бы маленький шарик с силой

$$F_1=G\frac{Mm}{l^2}.$$

Можно считать, что сила притяжения F_1 сплошного шара складывается из двух сил: силы притяжения шара с полостью, т.е. искомой силы F, и силы притяжения F_2 меньшего шара радиусом $R/2$, заполняющего сферическую полость (его масса $M/8$, а расстояние от центра масс до шарика массы m равно $l-R/2$). Тогда искомая сила, равная разности сил притяжения сплошного шара F_1 и меньшего шара F_2, заполняющего полость, выразится так:

$$F=G\frac{Mm}{l^2}-G\frac{\frac{M}{8}m}{(l-\frac{R}{2})^2}.$$

Отсюда после преобразований получаем ответ, совпадающий с ответом в задачнике.

Ответ Славы:

$$GMm\frac{7l^2-8lR+2R^2}{8l^2(l-\frac{R}{2})^2}.$$

Заключение и выводы

Решив непростую задачу, наши герои очень обрадовались и, счастливые, вышли на прогулку. Мы же попытаемся показать, почему такой очевидный вроде бы приём, когда всю массу тела помещают в центр масс, нередко оказывается несправедлив. Рассмотрим совсем простой пример.

Пусть вдоль длинной спицы с пренебрежимо малой массой могут перемещаться маленькие бусинки A_1 и A_2, которые вначале находятся рядом (рис. 3). Силу их гравитационного взаимодействия с точечной массой B, находящейся на некотором расстоянии от них, легко рассчитать по закону всемирного тяготения.

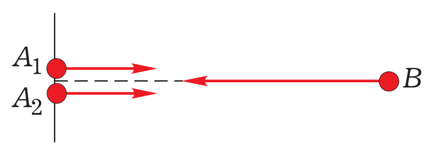

Рис. 3

Если же бусинки будут симметрично удаляться от своего начального положения, то центр масс системы из бусинок не изменит своего положения, а сила их взаимодействия с B, очевидно, уменьшится. Силы, действующие на A_1, A_2 и B, показаны на рисунках 3 и 4.

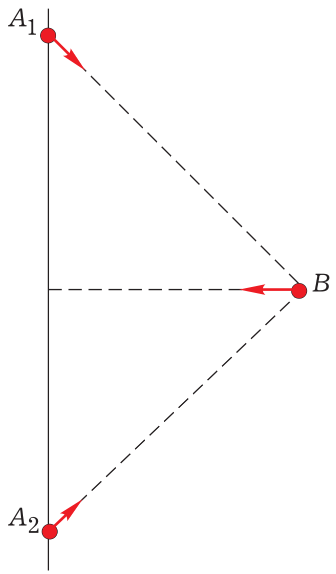

Рис. 4

Заметим ещё, что ответы трёх друзей совпадают в предельном случае, когда расстояние между свинцовым шаром и шариком значительно больше радиуса свинцового шара: $l \gg R$. В этом случае размером шара можно пренебречь, и искомую силу следует определить, как силу взаимодействия между материальными точками массами $7M/8$ и m:

$$F = G\frac{7Mm}{8l^2}.$$

Сформулируем теперь основной вывод, который можно сделать из этой истории.

Заменять силу тяготения данного тела с массой M силой тяготения точечной массы с массой M, помещённой в центре масс данного тела, вообще говоря, нельзя. Только в тех случаях, когда размеры тел малы по сравнению с расстоянием между ними (т.е. когда тела можно считать материальными точками) или когда притягивающее тело имеет сферически-симметричное распределение массы, например, однородный шар, можно вычислять силу тяготения этого тела, считая, что вся его масса сосредоточена в центре масс. Этим последним обстоятельством мы и пользовались, когда вычисляли силы тяготения сплошного шара и заполняющего полость меньшего шара.

В качестве тренировки предлагаем задачу для самостоятельного решения.

Задача 4. Имеется шар массой M и радиусом R и материальная точка массой m (рис. 5). Во сколько раз уменьшится сила притяжения между ними, если в шаре сделать сферическую полость радиусом $5R/6$?

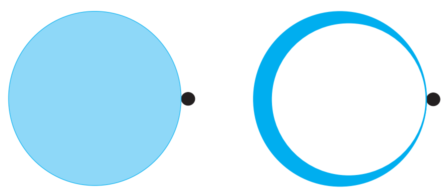

Рис. 5

Материальная точка лежит на прямой, проведённой через центры шара и полости, на расстоянии R от центра шара и на расстоянии $5R/6$ от центра полости.

Ответ: 6.